

величину модуля сдвига  $G$  материала зуба. Выражение для определения  $E_{C3}$  для ремней модулем  $m = 3$  мм при этом будет иметь вид

$$E_{C3} = 4G^{0.035} + Q_{C3} 0,125, \text{ МПа}$$

Величины динамической  $E_{Д3}$  и статической  $E_{C3}$  жесткостей зубьев связаны соотношением

$$E_{Д3} = E_{C3} \cdot K_{Д3},$$

где  $K_{Д3}$  - динамический коэффициент.

Предложенная в настоящей работе методика определения динамической жесткости зубьев позволяет найти величину этой жесткости в условиях, близких к эксплуатационным. Показано, что величина динамической жесткости зубьев превышает статическую в 1,2 – 1,4 раза и увеличивается по мере возрастания частоты нагружения зубьев. Располагая значениями динамической жесткости зубьев, можно производить уточненный расчет распределения нагрузки между зубьями ремня и шкива и более точно судить о надежности и долговечности зубчатоременной передачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич Ю.Е., Жуков К.П. Упругие характеристики зубчатых ремней. – В кн.: Передачи и опоры. – М.: Московский станкостроительный институт, 1974. – с. 101 – 112.
2. Гуревич Ю.Е. Деформация зубьев зубчатых ремней. – В кн.: Передачи и опоры. – М.: Московский станкостроительный институт, 1974. – с. 142 – 152.
3. Бичаускас Л.К. Исследование ременных передач. – Деп. в ЛитНИИТИ 03.09. 1985, № 1476-Ли. 208с.
4. Кузьмин А.В., Наталевич А.Н. Влияние релаксации на упругость зубьев ремня // Машиностроение. – Минск: Высшая школа, 1979. – Вып.3. с.100 – 103.
5. Лепетов В.А., Юрцев Л.Н. Расчеты и конструирование резиновых изделий. – Л.: Химия. 1987. – 408с.

УДК 621.94.084

Миронов Д.Н.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕГРАДАЦИИ ЭФФЕКТИВНЫХ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ И КОНСТРУКЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕТАЛЕЙ ДВИГАТЕЛЯ ПРИ ТЕРМОСИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

*Белорусский национальный технический университет,  
Минск, Беларусь*

### Иерархия процессов накопления повреждений при циклических нагрузках

Для более детального описания процессов деградации (старения) структур механической системы под действием циклических термосиловых воздействий целесообразно применить метод декомпозиции его на стадии (фазы), каждая из которых характеризуется уровнем (масштабом) явлений.

Общепринятые системы уравнений [1, 2, 3] описывают деформирование оболочек и лопаток роторов в упругой области, однако уже на этой стадии в деталях происходят процессы деградации упругих, теплопроводных свойств, выражающихся в том, что изначально запроектированные конкретные упругие, теплопроводные свойства материала детали начинают изменяться так, что увеличивается разброс значений коэффициентов упругости, теплопроводности от их проектных (начальных) значений в сторону уменьшения.

Математически это описывается следующей моделью. Пусть исходный материал представляет собой композицию (сплав)  $n$  компонентов. Обозначим материальный коэффициент  $\lambda$  (упругости, теплопроводности)  $i$ -го компонента  $\lambda_i$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ . Введем функцию плотности распределения  $f(\lambda)$  величины  $\lambda$ , тогда в начальном состоянии

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^n C_i \delta(\lambda - \lambda_i),$$

$$\delta(\lambda - \lambda_i) = \begin{cases} \infty & \lambda \neq \lambda_i \\ 0 & \lambda = \lambda_i \end{cases}, \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda = \sum_{i=1}^n C_i = 1.$$

На рисунке 1 представлено начальное распределение компонентов материала. Среднее значение  $\lambda$  вычисляется по формуле

$$\langle \lambda \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda f(\lambda) d\lambda = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i \quad (2)$$

из которой следует, что  $C_i$  здесь имеют смысл объемных концентраций компонентов  $\lambda_i$ .

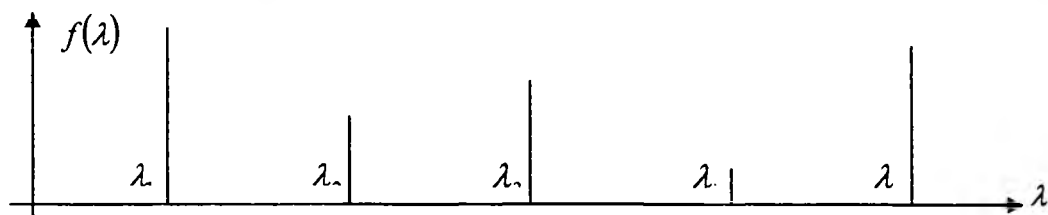


Рисунок 1 – Распределение компонентов материала

Формула (2) представляет собой формулу теории смесей для вычисления эффективных материальных коэффициентов композита.

Согласно (1)  $f(\lambda)$  представляет собой сумму  $\delta$ -функций, что соответствует материалу, в котором нет разброса коэффициента  $\lambda$  упругих теплопроводных свойств от значений  $\lambda_i$  каждого компонента. В случае, когда разброс свойств имеет место плотность вероятностей  $f(\lambda)$  представляет собой более сложную функцию полимодального вида (рисунок 2).

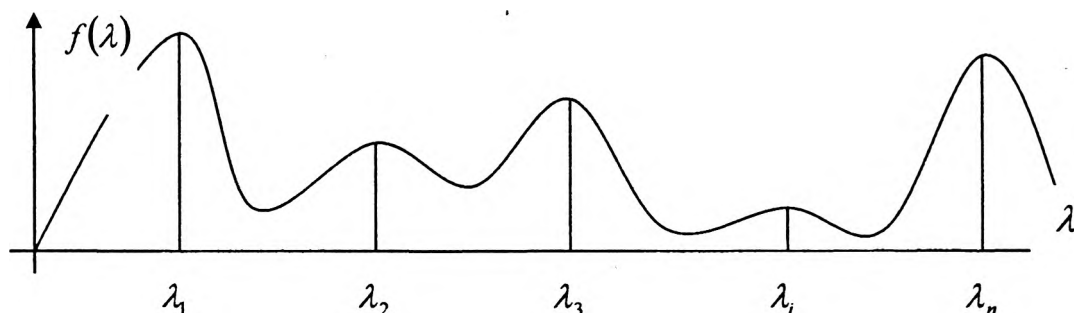


Рисунок 2 – Плотность распределения вероятностей коэффициента  $\lambda$

Наиболее простой вид такого типа имеет треугольная плотность распределения рисунок 3.

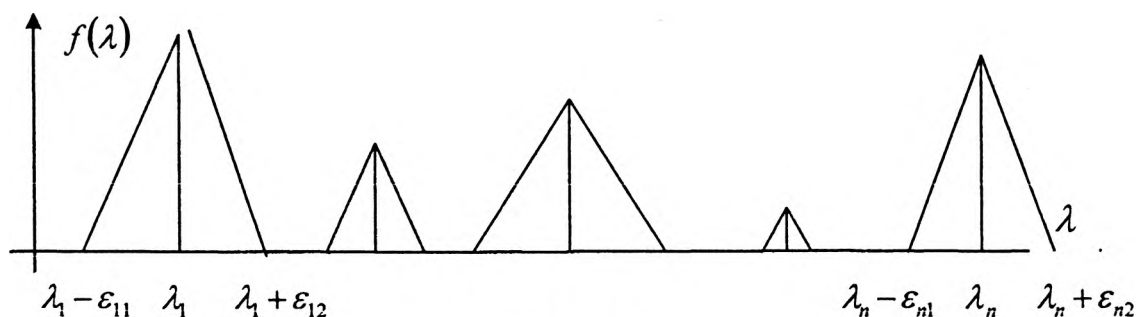


Рисунок 3 – Треугольная плотность распределения

Треугольная плотность распределения  $\lambda$  может быть записана в аналитическом виде

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{2C_1}{\varepsilon_{i,1} + \varepsilon_{i,2}} + \frac{(-1)^{j-1} 2C_2}{(\varepsilon_{i,1} + \varepsilon_{i,2}) \varepsilon_{i,j}} (\lambda - \lambda_i), \\ \text{для } \lambda \in [\lambda_i - (1 + (-1)^{j-1}) \varepsilon_{i,j} / 2, \lambda_i + (1 + (-1)^j) \varepsilon_{i,j} / 2], \\ 0 \text{ для всех остальных } \lambda \\ i = 1 \dots n, j = 1, 2 \end{cases} \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{i,j}$  характеризуют разброс значений компонента материала от значения  $\lambda_i$ .

#### Вычисление эффективных модулей с разбросом свойств компонентов

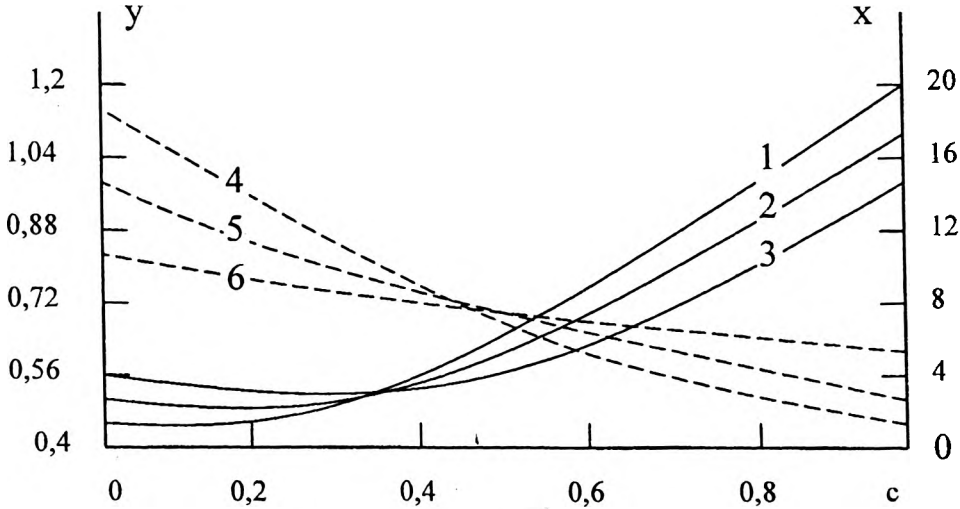


Рисунок 4 – Зависимости  $x = K_0 K_1^{-1}$ ,  $y = \mu_0 \mu_1^{-1}$  от  $c = c_2$  концентрации компоненты с упругими модулями  $K_2, \mu_2$  (сплошная и штриховая линии -  $x, y$  соответственно) при значениях параметров  $\chi = 17$ ;  $m_1 = 0, 5$ ;  $m_2 = 10$ ;  $1, 4$  -  $\delta_{11}^{(k,\mu)} = \delta_{22}^{(k,\mu)} = 0, 5$ ;  $\delta_{12}^{(k,\mu)} = \delta_{21}^{(k,\mu)} = 0,001$ ;  $2, 5$  -  $\delta_{11}^{(k,\mu)} = \delta_{22}^{(k,\mu)} = \delta_{12}^{(k,\mu)} = \delta_{21}^{(k,\mu)} = 0$ ;  $3, 6$  -  $\delta_{12}^{(k,\mu)} = \delta_{21}^{(k,\mu)} = 0, 5$ ;  $\delta_{11}^{(k,\mu)} = \delta_{22}^{(k,\mu)} = 0,001$ .

Рассмотрим вычисление эффективных упругих модулей материала, у которого в силу каких-либо причин имеется отклонение упругих модулей от основных значений компонента. Разброс может быть следствием несовершенства технологии, наличия переходных слоев между компонентами. Положим, что плотность распределения эффективных объемного  $K$  и сдвигового  $\mu$  модулей имеют вид

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{2c_i}{\varepsilon_{i,1} + \varepsilon_{i,2}} + \frac{(-1)^{j-1} 2c_j}{(\varepsilon_{i,1} + \varepsilon_{i,2}) \varepsilon_{i,j}} (\lambda - \lambda_i) \\ \text{для } \lambda \in [\lambda_i - (1 + (-1)^{j-1}) \varepsilon_{i,j} / 2, \lambda_i + (1 + (-1)^j) \varepsilon_{i,j} / 2], \\ 0 \text{ для остальных } \lambda \end{cases}$$

где  $\lambda = K, \mu$ ;  $\lambda_1 = K_1, \mu_1$ ;  $\lambda_2 = K_2, \mu_2$ , соответственно  $i, j = 1, 2$ ;  $c_1, c_2$  - концентрации компонентов, т. е.  $c_1 + c_2 = 1$ . Вычисляя математическое ожидание получаем систему уравнений. Первое уравнение системы имеет вид:

$$L = C_1 [(A_{01} \varepsilon_{11}^{-1} - 1) \ln(1 - \varepsilon_{11} A_{01}^{-1}) + (A_{01} \varepsilon_{12} + 1) \ln(1 + \varepsilon_{12} A_{01}^{-1})] + \\ + C_2 [(A_{02} \varepsilon_{21}^{-1} - 1) \ln(1 - \varepsilon_{21} A_{02}^{-1}) + (A_{02} \varepsilon_{22} + 1) \ln(1 + \varepsilon_{22} A_{02}^{-1})] \\ C_i = 2c_i (\varepsilon_{i,1} + \varepsilon_{i,2})^{-1}; \quad A_{0i} = K_i - K_0 + L^{-1}; \quad \varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad i, j = 1, 2.$$

Заменив  $L$  на  $L^{(i)}$ ,  $A_{0i}$  на  $B_{0i} = \mu_i - \mu_0 + L^{-1}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  на  $\varepsilon^{(\mu)}$ , получим второе уравнение. При  $\varepsilon_{ij} \rightarrow 0$  система уравнений переходит в уравнения метода самосогласования [4, 5], что соответствует переходу плотностей распределения в плотности распределения вида

$$f(\lambda) = c_1 \delta(\lambda - \lambda_1) + c_2 \delta(\lambda - \lambda_2), \quad c_1 + c_2 = 1.$$

Переходя к безразмерным величинам  $x = K_0 K_1^{-1}$ ,  $y = \mu_0 \mu_1^{-1}$ ,  $\delta_{ij} = \varepsilon_{ij} \lambda_i^{-1}$ , получаем систему уравнений, первое из которых имеет вид

$$\begin{aligned} L' &= h_1 [(a_{01} \delta_{11}^{-1} - 1) \ln(1 - \delta_{11} a_{01}^{-1}) + (a_{01} \delta_{12} + 1) \ln(1 + \delta_{12} a_{01}^{-1})] + \\ &+ h_2 [(a_{02} \delta_{21}^{-1} - 1) \ln(1 - \delta_{21} a_{02}^{-1}) + (a_{02} \delta_{22} + 1) \ln(1 + \delta_{22} a_{02}^{-1})] \\ h_1 &= 2c_1 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12})^{-1}, \quad h_2 = 2c_2 (\chi(\delta_{21} + \delta_{22}))^{-1}, \quad \delta = \delta^{(k)}, \\ a_{01} &= 1 + 4m_1 y / 3, \quad a_{02} = 1 + 4m_1 \chi y, \quad \chi = K_2 K_1^{-1}, \quad m_1 = \mu_1 K_1^{-1}, \\ L' &= (x + 4ym_1 / 3)^{-1}. \end{aligned}$$

Второе уравнение получается при замене  $L$  на  $L^{(i)}$ ,  $a_{01}$  на  $b_{01}$ ,  $a_{02}$  на  $b_{02}$ , где  $L^{(i)} = (2x + 4m_1 y)(5y(x + 4m_1 y / 3))^{-1}$ ,  $b_{01} = 1 - y + 5y(x + 4m_1 y / 3) / (2x + 4m_1 y)$ ,  $b_{02} = 1 + (b_{01} - 1) / m_2$ ,  $\delta^{(k)}$  на  $\delta^{(\mu)}$ , а  $\chi$  во втором слагаемом на  $m_2 = \mu_1 / \mu_2$ .

Из рисунка 4 следует, что для двухкомпонентных материалов существует концентрация  $c^*$ , при которой разброс упругих свойств компонентов не влияет на эффективные свойства: для  $x = K_0 K_1^{-1}$  эта концентрация  $c^* = 0,3 - 0,4$ ; для  $y = \mu_0 \mu_1^{-1}$  - это  $c^* = 0,5$ . Максимальный разброс наблюдается при  $c = 0$  и  $1,0$ ; что вполне соответствует физическому смыслу.

Перейдем в (3) к безразмерным величинам  $\delta_{11} = \frac{\varepsilon_{11}}{\lambda_1}$ ,  $\delta_{12} = \frac{\varepsilon_{12}}{\lambda_1}$ ,  $\Lambda = \frac{\lambda}{\lambda_1}$ ,  $\Lambda = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}$ , тогда  $f(\Lambda) d\Lambda = f(\lambda) d\lambda$ ,  $f(\Lambda) = f(\lambda) \lambda_1$ ,

$$f(\Lambda) = \begin{cases} \frac{2c_1}{\delta_{11} + \delta_{12}} + \frac{2(-1)^{i-1} c_2}{(\delta_{11} + \delta_{12}) \delta_{ij}} (\Lambda - \Lambda_i) & \delta\lambda \square \Lambda \in \left\{ \Lambda_i + (-1)^{i-1} \frac{\delta_{ij}}{2}, \Lambda_i + (1 + (-1)^i) \delta_{ij} / 2 \right\} \\ 0 & \delta\lambda \square \xi\rho\varsigma\eth\acute{o}\nu\ddot{v} \quad \Lambda, \quad \Lambda_i = 1 \end{cases}$$

На рисунке 5 изображена функция  $f(\Lambda)$

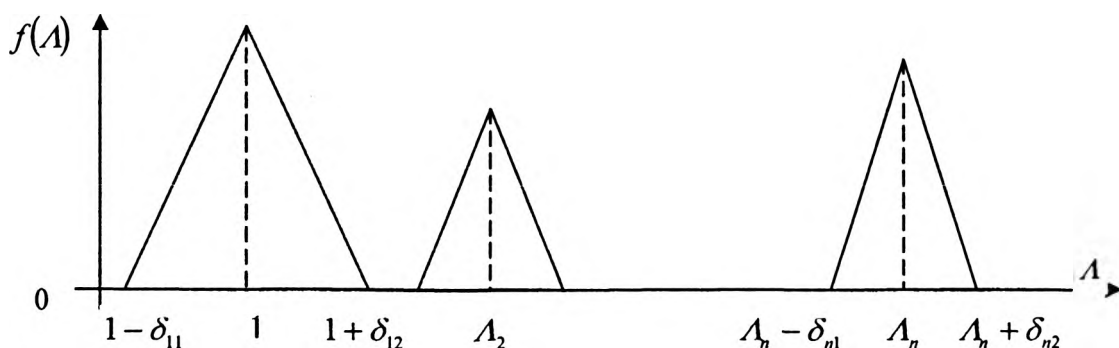


Рисунок 5 – Функция  $f(\Lambda)$

Переход к безразмерным переменным позволяет первую стадию деградации описать как изменении разброса  $\delta_{11}$  от 0 до 1. При  $\delta_{11} = 0$  нет деградации физико-механических свойств, при

$\delta_{11}=1$  заканчивается первая стадия пред микроповреждения, на которой нет нарушения сплошности среды, т. е. нет микропор, микротрещин.

#### Теплопроводность материалов, обладающих разбросом свойств компонентов

Многокомпонентная модель среды не учитывает эффект разных свойств. Модель со слоистыми включениями позволяет учесть влияние перенастройки структуры в граничной зоне на физико-механические свойства. Однако в указанных работах расчеты проведены на материалах, структура которых представляет собой систему повторяющихся ячеек. Предлагается способ расчета эффективных коэффициентов сред, обобщающий формулы Оделевого на случай непрерывного распределения физико-механических свойств.

Согласно формуле Оделевого, эффективный коэффициент теплопроводности  $\lambda_0$   $n$ -компонентной среды находится из уравнения

$$\sum_{i=1}^n c_i \gamma_i = \langle \gamma \rangle = 0, \quad \gamma_i = \frac{\lambda_i - \lambda_0}{\lambda_i + 2\lambda_0}, \quad \gamma = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda + 2\lambda_0}, \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1.$$

Для изотропной неоднородной среды можем считать, что  $\lambda = \lambda(x)$  и  $\gamma = \gamma(x)$ , причем на множестве возможных реализаций компонентов  $\lambda(x)$  - случайная функция. В каждой точке  $n$ -компонентной среды случайная величина, принимающая значения  $\lambda_i$  с вероятностью  $c_i$  (концентрация  $i$ -го компонента).

Формулу Оделевого можно рассматривать как вычисление  $\gamma = \gamma(\lambda)$  с плотностью распределения  $f(\lambda) = \sum_{i=1}^n c_i \delta(\lambda - \lambda_i)$ :

$$\langle \gamma \rangle = \int \gamma(\lambda) f(\lambda) d\lambda$$

Обобщение формулы Оделевого на случай  $n$ -компонентной среды, обладающей разбросом теплопроводных свойств компонентов получим вычисляя  $\langle \gamma \rangle$  с плотностью распределения  $f(\lambda)$ , учитывающей разброс  $\lambda$  от  $\lambda_i$ .

Рассмотрим  $n$ -компонентную изотропную среду, разброс свойств компонентов которой определяется  $n$ -треугольным распределением:

$$f(\lambda) = \begin{cases} S_i \left( 1 + \frac{\lambda - \lambda_i}{\varepsilon_{i1}} \right), & \lambda \in [\lambda_i - \varepsilon_{i1}, \lambda_i] \\ S_i \left( 1 - \frac{\lambda - \lambda_i}{\varepsilon_{i2}} \right), & \lambda \in [\lambda_i, \lambda_i + \varepsilon_{i2}] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$S_i = \frac{2c_i}{\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2}}, \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь  $f(\lambda)$  плотность распределения коэффициента теплопроводности;  $\lambda$ ,  $\lambda_i$  - основное значение коэффициента теплопроводности  $i$ -го компонента;  $\varepsilon_{i1}$ ,  $\varepsilon_{i2}$  - значения разбросов коэффициента теплопроводности от основного значения  $\lambda_i$   $i$ -го компонента. Каждый из компонентов материала представляет собой однородную изотропную среду.

Теперь вычисляя  $\langle \gamma \rangle$  и приравняв ее к нулю получим

$$L = \sum_{i=1}^n S_i \sum_{\beta=1}^2 \frac{A_{0i} + (-1)^\beta \varepsilon_{i\beta}}{\varepsilon_{i\beta}} \ln \frac{A_{0i} + (-1)^\beta \varepsilon_{i\beta}}{A_{0i}}, \quad (4)$$

$$A_{0i} = \lambda_i - \lambda_0 + \frac{1}{L}, \quad L = (3\lambda_0)^{-1}, \quad A_{0i} = 2\lambda_0 + \lambda_i.$$

Расчет зависимости эффективной теплопроводности  $\lambda_0$  от  $c_i$  обладает тем недостатком, что при  $\varepsilon_{ij} \rightarrow 0$  правая часть представляет собой неопределенность типа  $0/0$ , поэтому при малых  $\varepsilon_{ij}$  решение неустойчиво. При относительном разбросе  $\varepsilon_{ij}\lambda_i^{-1} \leq 10^{-3}$  расчет  $\lambda_0$  удобно вести на основе разложения правой части уравнения в ряд Маклорена. Для двухкомпонентной среды в безразмерном виде получим

$$1 = 3x \left[ (1 - c) \left( \frac{1}{B_{01}} + \frac{\delta_{11} - \delta_{12}}{3B_{01}^2} \right) + c \left( \frac{1}{B_{02}} + \frac{\alpha(\delta_{21} - \delta_{22})}{3B_{02}^2} \right) \right],$$

$$\alpha = \lambda_2 \lambda_1^{-1}, \quad x = \lambda_0 \lambda_1^{-1}, \quad B_{0i} = A_{0i} \lambda_1^{-1}, \quad c = c_2. \quad (5)$$

Но на зависимость  $x$  от  $c$  влияет несимметричность разброса т. е. величина  $\delta_{11} - \delta_{12}$ . На рисунке 6 изображена зависимость  $\lambda_0$  от  $c$  материала из которого изготовлены детали авиационного двигателя. Кривая 1 получена при  $\delta_{12} = 0.1$ ,  $\delta_{21} = 0.05$ ; 2 – при  $\delta_{12} = 0.05$ ,  $\delta_{21} = 0.1$ ; 3 – при  $\delta_{11} = 0.1$ ,  $\delta_{21} = 0.05$ ; 4 – при  $\delta_{11} = 0.05$ ,  $\delta_{21} = 0.1$ . Кривая 5 соответствует случаю, когда нет разброса свойств компонентов:  $\delta_{ij} = 0$ .

Из рисунка 6 видно, что существует концентрация  $c$ , при которой наличие разброса не влияет на значение коэффициента теплопроводности.

Формулы (4) и (5), связывающие значения эффективного коэффициента  $\lambda_0$ , компонентов  $\lambda_i$ , концентрации  $c_i$ , разбросов  $\varepsilon_{ij}$ , могут быть использованы для решения задачи определения разброса  $\varepsilon_{ij}$  по измеренным и заданным значениям  $\lambda_0$ ,  $\lambda_i$ ,  $c_i$ . Эта задача по отношению к задаче вычисления эффективных коэффициентов по заданным  $\lambda_i$ ,  $c_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$  является обратной, позволяя получить оценку разброса свойств в реальных материалах. Отметим, что на основе условия самосогласования  $\langle \gamma \rangle = 0$  можно получить уравнение для эффективного коэффициента теплопроводности  $\lambda_0$  неоднородных сред, распределение материальных коэффициентов которых подчиняется любым другим законам распределения. При этом, если в пределе взятое распределение переходит в комбинацию функций  $\left( f(\lambda) = \sum_{i=1}^n c_i \delta(\lambda - \lambda_i) \right)$ , то уравнения (4), (5) переходят в известные уравнения  $n$ -компонентной среды, получаемые методом самосогласования или эквивалентным ему формулам Оделевского.

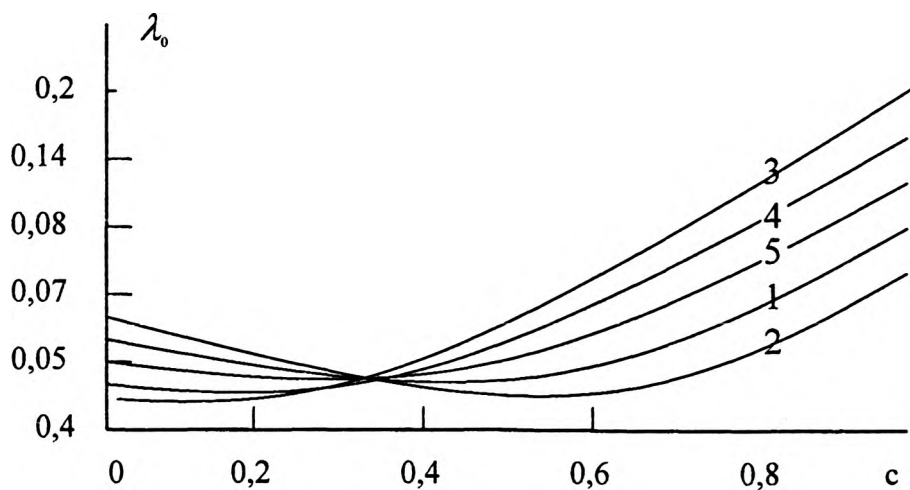


Рисунок 6 – Зависимость коэффициента теплопроводности от концентрации компонентов материала

Предлагаемый подход позволяет учесть влияние разброса значений компонент в материале на его эффективные свойства не только теплопроводности, но и в электропроводности, упругости, диффузии, диэлектрической проницаемости.

#### Моделирование деградации физико-механических свойств материала

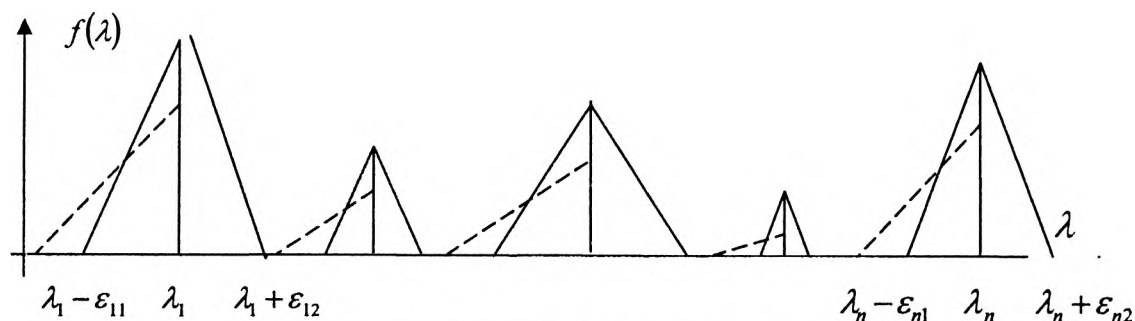


Рисунок 7 – Изменение треугольной плотности распределения при выполнении условия нормировки

Изменение коэффициентов упругости, теплопроводности материала в процессе эксплуатации двигателя можно описать как изменение  $\varepsilon_{i,j}$  в зависимости от напряжений, температуры, числа циклов и других факторов, влияющих на деградацию физико-механических свойств, например в виде кинетических уравнений вида

$$\frac{d\varepsilon_{i,j}}{dN} = f_{i,j}(\sigma, N, T), \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Обычно, деградация представляет собой разброс свойств в сторону уменьшения. Из условия нормировки следует, что площадь каждого треугольника на рисунке 3 должна оставаться постоянной, то есть при увеличении основания  $\varepsilon_{i,j}$  происходит уменьшение высоты треугольников рисунок 7.

Условие нормировки должно выполняться в процессе изменения разброса свойств, поэтому оно должно рассматриваться совместно с уравнениями (6).

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda = 1 \quad (7)$$

Рассмотренная модель деградации физико-механических свойств материала представляет собой первый уровень в иерархии процесса старения и разрушения материала. На этой стадии нет никакой поврежденности материала, связанной с появлением микропор, микротрещин, что обычно выражается в уменьшении несущего объема (сечения).

Вторая стадия деградации – стадия накопления повреждений типа микропор, микротрещин можно моделировать как процесс роста разброса свойств до момента, когда  $\varepsilon_{i,j}$  станет равным нулю. В этом случае появляется компонент, материальные коэффициенты которого равны нулю, то есть появляются микропоры. Реально в любом материале изначально присутствует некоторое количество дефектов типа микропор, микротрещин, количество которых может расти одновременно с разбросом свойств номинальных значений коэффициентов [6, 7, 8]. Однако на первой стадии, как показывают металлографические исследования, процесс деградации без нарушения сплошности является доминирующим.

Вторая стадия – это стадия, когда доминирующим становится процесс возникновения микропор, микротрещин и рост их концентрации.

Из условия нормировки следует, что высота треугольника, описывающего рост концентрации пор растет так, что площадь треугольника остается постоянной, площадь треугольника описывающего рост деградации (разброса) свойств основного материала также остается постоянной при том, что высота его уменьшается, а основание увеличивается. Рассмотрим модель накопления повреждений, происходящую не непрерывно в процессе деградации, а скачком от основного значения модулей до нулевого значения в микропорах, микротрещинах. Положим, что материал с порами описывается двухкомпонентной (неоднородной) функцией вида:

$$\lambda(x) = \lambda_0 \eta(x),$$

где  $\eta(x)$  - индикаторная функция.

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & x \in V - V_p \\ 0 & x \in V_p \end{cases},$$

где  $V$  - неповрежденный объем,  $V_p$  - поврежденный объем.

Эффективное (среднее) значение коэффициента  $\lambda$  вычисляется по формуле

$$\langle \lambda \rangle = \lambda_0 (1 - C),$$

где  $C = \frac{V_p}{V}$  - объемная концентрация пор.

В этой модели рост поврежденности описывается кинетическим уравнением типа

$$\frac{dC}{dN} = f(n, \sigma_{ij}, T),$$

где  $N$  - число циклов. При таком подходе  $C$  имеет смысл функции поврежденности, введенной Работновым и Качановым, описанной в первой главе.

Третья стадия наступает, когда слившиеся микротрещины образуют макротрещину. Этот процесс описывается моделью перколяции, согласно которой хаотическое слияние микропор и микротрещин в некотором характерном объеме приводит к тому, что образовавшаяся трещина прорастает через рассматриваемый объем. Это также может быть записано как зависимость эффективных упругих модулей от концентрации пор. При достижении концентрацией  $C$  значения порядка 0,56 – 0,63 трещина прорастает через рассматриваемый объем. Следующим этапом исследования является исследование условий роста трещины в детали конструкции и ее разрушение.

Таким образом, критическим значением параметра поврежденности (накопления пор) является не 1, а величина порядка 0,56 – 0,63.

В третьей стадии, кластеризации микротрещин, зависимость эффективных коэффициентов  $\lambda$  от концентрации пор записывается в виде

$$\lambda = \lambda_0 (P_{cr} - P)^n,$$

где коэффициент  $n$  зависит от свойств материала.

Таким образом, в результате третьей стадии в некотором объеме детали внутри или на поверхности возникает трещина длиной порядка характерного диаметра выделенного объема.

Четвертая стадия начинается, когда трещина из начального объема начинает прорастать в остальной объем. Рост трещины происходит в поле микротрещин, микропор, то есть в неоднородной среде. Вследствие того, что неоднородность распределена по объему хаотично, то траектория трещины зависит не только от характера нагрузки, но и от распределения неоднородности. Это связано с тем, что перенос энергии в неоднородной среде происходит вдоль линий тока энергии, траектории которых касательны к вектору Умова-Пойнтинга. Как известно, в механических структурах существуют слабые места, имеющие минимальную жесткость материальную или конструкционную [9, 10]. Согласно вариационному принципу разрушения линия тока энергии направлены в места, где она совершает максимальную работу, а именно в слабые места. Выявление слабых мест, идентификация типов повреждения является задачей дефектоскопии.

Модель роста трещины записывается в виде

$$\frac{dl}{dN} = f(l, N, \sigma, T),$$

где  $l$  - длина трещины.

Пятая стадия заканчивается разрушением детали, то есть разделением ее на части трещиной.

Рассмотренная иерархическая пятиступенчатая модель деградации материала является достаточно упрощенной, так как стадии перекрываются, а деление на четко выраженные фазы основывается на том, что стадии можно выделить по принципу доминирующего процесса.

**Моделирование процессов деградации материала вследствие локального изменения плотности (разрыхления)**

Как известно, внутренняя энергия элементов сплошной среды при уменьшении плотности среды  $\rho$  стремится к некоторому постоянному значению, равному теплоте испарения. Хотя тем-



пература в двигателе не достигает температур плавления и испарения, однако процессы деградации материалов вследствие локального изменения плотности могут иметь место.

Изменение объема плотности элемента среды определяется производными перемещений по пространственным координатам. При локализации деформаций в сколь угодно узких зонах производные перемещений по пространственным координатам могут быть большими при малых перемещениях и соответственно изменение объема плотности может быть не малым при малых перемещениях [11, 12].

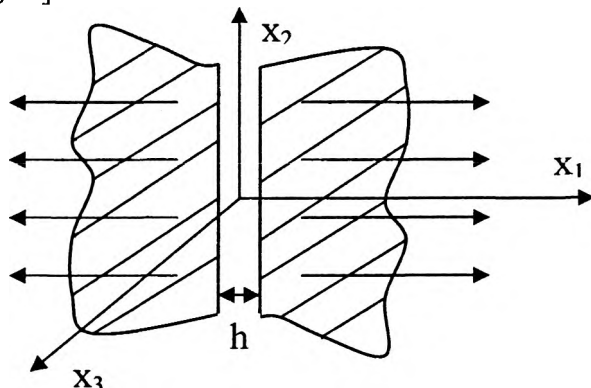


Рисунок 8 – Модель тонкой упругой прослойки

Рассмотрим простейшую модель возникновения повреждений путем локализации деформаций для задачи о растяжении тонкой упругой прослойки между жесткими слоями (полупространствами), представленной на рисунке 8.

С точностью до учета в прослойке краевых эффектов 2 – го порядка малости, положим, что в первом приближении деформированное состояние прослойки является одноосным, тогда можем записать

$$u_2 = u_3 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = e, \quad (8)$$

где  $e$  - деформация,  $u_1$  - перемещения.

В случае (8), когда деформированное состояние упругой прослойки определяется одним параметром, положим, что таким параметром является плотность  $\rho$ , которая изменяется во времени, например, согласно уравнению

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho e.$$

Вычислим внутреннюю энергию  $I$  элементов прослойки, считая, что  $I$  является функцией только плотности  $\rho$ :  $I = I(\rho)$ . Тогда согласно закона сохранения энергии можем записать выражение для напряжения  $\sigma_{11}$  в виде

$$\sigma_{11} = \frac{\partial I}{\partial \rho_1}, \quad \rho_1 = \rho^{-1}. \quad (9)$$

Обозначим через  $\rho_0$  - плотность прослойки в недеформированном состоянии. Как было сказано выше, при уменьшении  $\rho$  внутренняя энергия должна оставаться ограниченной, то есть должно выполняться условие

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \rho_1} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0.$$

Как следует из (9) при  $\rho \rightarrow 0$  (испарение), должно выполняться  $\sigma_{11} \rightarrow 0$ . В то же время при  $\rho = \rho_0$  состояние является недеформированным,  $I=0$  и  $\sigma_{11} = 0$ . В процессе деформирования между этими крайними состояниями напряжения имеют максимум, причем при малом изменении плотности в начале деформирования, когда  $\rho$  мало отличается от  $\rho_0$  зависимость  $\sigma_{11}$  от  $\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)$  будет линейной (рисунок 9):

$$\sigma_{11} = \Delta \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right), \quad \Delta \geq 0.$$

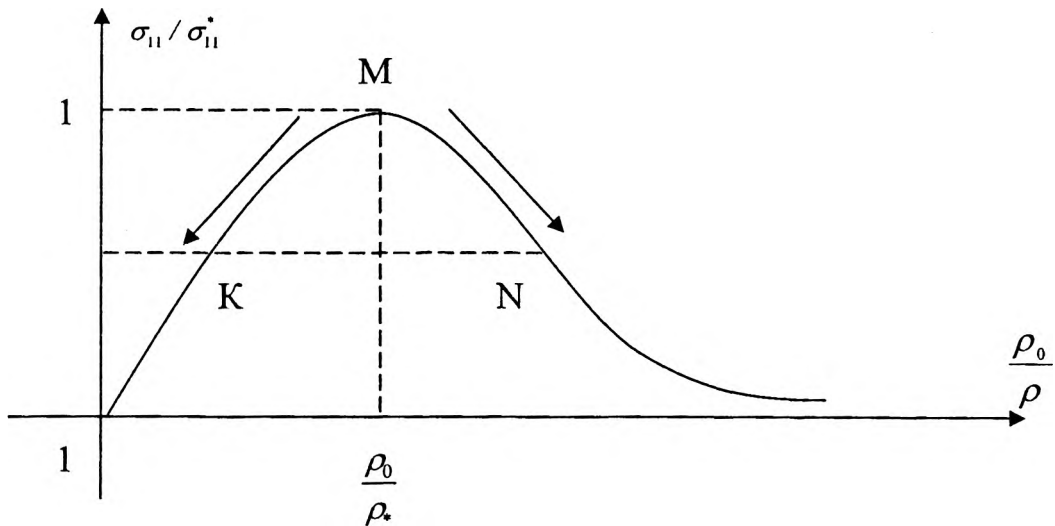


Рисунок 9 – Зависимость  $\sigma_{11} / \sigma_{11}^*$  от  $\frac{\rho_0}{\rho}$

На рисунке 9  $\rho_*$  - критическое значение плотности, а  $\sigma_{11}^*$  - напряжение при которых происходит образование микротрещины отрыва.

Рассмотрим диаграмму на рисунке 9. При достижении напряжением значения  $\sigma_{11}^*$  вне зависимости от того будет плотность  $\rho$  от значения  $\rho_*$  возрастать или убывать, напряжения будут уменьшаться либо по левой ветви диаграммы, либо по правой, то есть при  $\rho = \rho_*$  может происходить потеря устойчивости процесса деформирования. Это выразится в том, что перемещения по толщине прослойки могут изменяться при каком-либо  $x$  резко или скачком.

На рисунке 10 сплошной линией изображено линейное распределение перемещений в виде сплошной линии 1. При потере устойчивости (образовании дефекта), напряжения  $\sigma_{11}$  в прослойке будут всюду уменьшаться, скорость деформации уменьшается по левой ветви МК и увеличивается на правой ветви MN. Это соответствует распределению перемещений по типу, изображенному на рисунке 10 штрихпунктирной линией 2.

Рассмотренная модель описывает возможный механизм хрупкого микро разрушения в зонах контакта элементов конструкции, однако, в принципе рассмотренная модель пригодна для описания процесса образования микродефектов по границам кристаллитов в поликристаллических материалах.

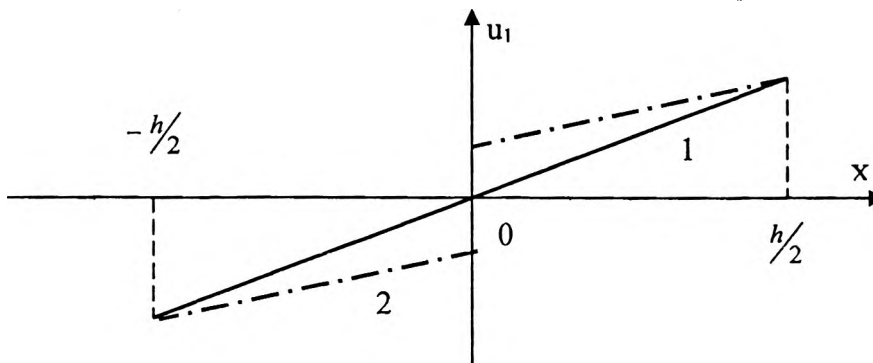


Рисунок 10 - Распределение перемещений  $u_1$  по толщине прослойки.

Модель вязкого микро разрушения с учетом влияния температуры требует использования такой модели, в которой учитывается изменение плотности, ограниченность внутренней энергии, локализация деформаций. Существуют разные модели сплошной среды [13, 14], описывающие процесс накопления повреждений с учетом пластического деформирования. Как и в случае модели для хрупкого локального разрушения необходимо построить модель, для которой существовала

бы зависимость напряжений от плотности, существовала критическая плотность, при которой напряжение достигало максимума и затем уменьшалось.

Обозначим девиаторы тензоров напряжений  $I_{i,j}$ , деформаций  $\gamma_{i,j}$ .

$$I_{i,j} = \sigma_{i,j} - \delta_{i,j} \sigma, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{i,j} \delta_{i,j}, \quad \gamma_{i,j} = e_{i,j} - \frac{1}{3} \delta_{i,j} e, \quad e = \delta_{i,j} \sigma_{i,j}, \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases},$$

$$e_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Здесь  $\delta_{i,j}$  - Кронеера,  $\sigma$  - среднее напряжение,  $e$  - объемная деформация, по повторяющимся индексам - суммирование,  $e_{i,j}$  - деформация,  $\sigma_{i,j}$  - напряжение.

Определяющие уравнения связи между напряжениями и деформациями возьмем в виде

$$I_{i,j} = 2\mu \frac{\rho}{\rho_0} \left( 1 - \frac{2}{3} e \right) \gamma_{i,j}, \quad \sigma = \frac{\rho}{\rho_0} \left( 1 - \frac{2}{3} e \right) \left[ \frac{df}{de} - (T - T_0) \frac{d\Theta}{de} \right], \quad f = f(e), \quad \Theta = \Theta(e), \quad (10)$$

где  $T$  - текущая температура,  $T_0$  - температура в недеформированном состоянии,  $\mu$  - модуль сдвига при малых изменениях плотности.

Изменение температуры и энтропии в зависимости от времени определяем уравнениями

$$\rho \frac{dT}{dt} = T \frac{d}{dt} (S - \Theta), \quad T \frac{dS}{dt} = \frac{1}{\rho} (\sigma_{i,j} \varphi_{i,j} - \text{div} \bar{q}), \quad (11)$$

где  $c$  - коэффициент теплоемкости (при постоянных деформациях),  $S$  - энтропия,  $\bar{q}$  - вектор потока тепла.

Изменение плотности и упругих деформаций в зависимости от времени определяется кинетическими уравнениями вида

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho e, \quad \frac{de}{dt} = \left( 1 - \frac{2}{3} e \right) e, \quad \frac{d\gamma_{i,j}}{dt} + \gamma_{i,k} e_{k,j} + \gamma_{j,k} e_{k,i} = \left( 1 - \frac{2}{3} e \right) e_{i,j} - \varphi_{i,j}, \quad (12)$$

где  $\varphi_{i,j}$  - тензор скоростей неупругих деформаций.

Внутренняя энергия среды, деформирование которой описывается уравнениями (10) – (12) запишется в виде

$$\Theta = f + T_0 \Theta + \frac{2\mu}{\rho_0} \Gamma + cT, \quad \Gamma = \frac{1}{2} \gamma_{i,j} \gamma_{i,j}. \quad (13)$$

Из (10) – (12) следует зависимость между  $\rho$  и  $e$  и, следовательно,  $f$  и  $\Theta$  являются функциями  $\rho$ , причем с учетом (11)

$$\sigma = \frac{df}{d\rho_1} - (T - T_0) \frac{d\Theta}{d\rho_1}, \quad e \frac{df}{d\rho_1} \geq 0, \quad \frac{d\Theta}{d\rho_1} \geq 0. \quad (14)$$

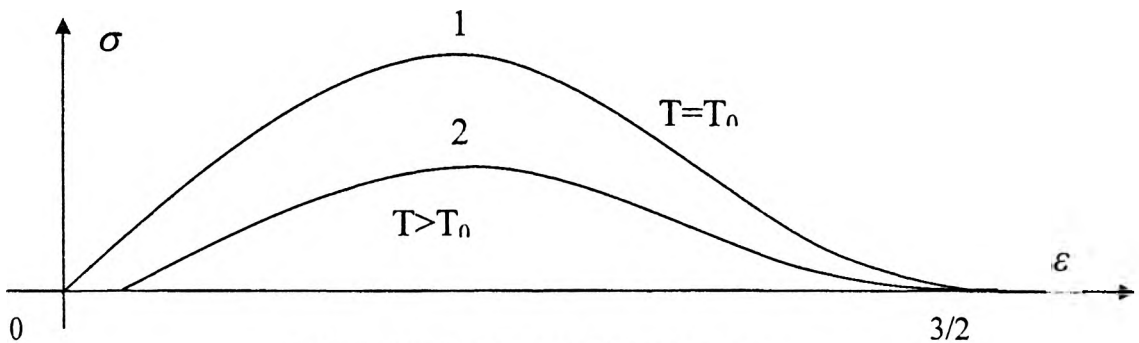


Рисунок 11 – Диаграмма деформирования

Из условия ограниченности внутренней энергии  $I$  при уменьшении плотности  $\rho$  в условиях изотермического расширения

$$\frac{df}{d\rho_1} \rightarrow 0, \quad \frac{d\Theta}{d\rho_1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow 0. \quad (15)$$

Тогда из (14), (15) и (10) можно получить, что среднее напряжение  $\sigma$  имеет максимальное значение при некотором значении  $e$  (рисунок 11).

На рисунке 11 диаграмма 1 соответствует температуре  $T_0$  в недеформированном состоянии, диаграмма 2 соответствует состоянию с постоянной температурой  $T > T_0$ .

Рассмотрим модель идеального упругопластического деформирования при условии пластичности Мизеса

$$\frac{1}{2} I_{i,j} I_{i,j} = I^n.$$

Ассоциированный закон течения дает связь между скоростями пластических деформаций и девиатором напряжений в виде

$$\varphi_{i,j} = \lambda I_{i,j}.$$

В выражении (13) для внутренней энергии величина  $\frac{2\mu}{\rho_0} \Gamma$  определяет энергию упругого изменения формы элемента. Она связана с величиной интенсивности касательных напряжений  $I$  равенством

$$\frac{2\mu}{\rho_0} \Gamma = \lambda I, \quad \lambda = \frac{\rho_0}{2\mu\rho^2 \left(1 - \frac{2}{3}\gamma\right)^2}.$$

Из условия ограниченности внутренней энергии  $I$  при  $\rho \rightarrow 0$  следует, что величина  $\Gamma$  должна быть ограниченной при  $\rho \rightarrow 0$  и, следовательно,  $I \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$ . При малых деформациях сдвига и удлинениях  $\rho = \rho_0$  энергия упругого изменения формы элементов отличаются от интенсивности касательных напряжений лишь постоянным множителем. Отсюда следует, что учет пластичности можно осуществлять в двух эквивалентных формулировках относительно  $I$  и  $\Gamma$ :

$$1. \lambda = 0 \text{ при } I < \tau_s^2 \text{ или } I = \tau_s^2, \frac{dI}{dt} < 0;$$

$$\lambda \geq 0 \text{ при } I = \tau_s^2 \text{ или } \frac{dI}{dt} = 0.$$

$$2. \lambda = 0 \text{ при } \Gamma < \Gamma_s \text{ или } \Gamma = \Gamma_s, \frac{d\Gamma}{dt} < 0; \quad (16)$$

$$\lambda \geq 0 \text{ при } \Gamma = \Gamma_s \text{ или } \Gamma_s = \left(\frac{T_s}{2\mu}\right)^2, \frac{d\Gamma}{dt} = 0,$$

где  $T_s$  - предел текучести при сдвиге.

В общем случае, когда  $\rho$  существенно отличается от  $\rho_0$  используются соотношения (16).

Из анализа уравнений модели следует, что в среде с ограниченной внутренней энергией при уменьшении  $\rho$ , касательные напряжения также остаются ограниченными. Локализация деформаций в этом случае проявляется в возникновении зон локализации деформаций, которые в идеальном случае представляют собой линии скольжения. В случае "вязкого" микроразрушения в зернистых материалах (поликристаллах) микросдвиг происходит по границам зерен (кристаллов).

Таким образом, рассмотренные модели хрупкого и "вязкого" разрушения или их комбинации могут реализоваться в деталях двигателя как механизм деградации свойств материала за счет изменения плотности, разрыхления.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1.1. Parkins R. N. Stress Corrosion Cracking and Embrittlement // Wiley, New York. – 1956. – p. 140.
2. Зуев В.В Об ударном нагружении мишени из композиционных материалов // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение. – 1989. – № 30. – с. 148 – 155.
3. Бойко В.И., Евстигнеев В.В. Введение в физику взаимодействия сильноточных пучков заряженных частиц с веществом. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 288 с.
4. Kroner E. // J. Phys. F. G. B. – 1978. – N 8. – P. 2261 – 2267.
5. Hill R. // J. Phys. Solids. – 1967. – Vol. 15. – P. 319 – 329.
6. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные ме-

тоды решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1980. – 178 с. 7. Orowan E. Reports on Progress in Physics. – 1949. – р. 185. 8. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. – М.: Физмат. Лит, 2001. – Т. 1. – 445 с. 9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. – М.: Физматгиз, 1963. – 234 с. 10. Cazaud R., Pomey G., Rable R., Janssen Ch. La fatigue des metaux. – Dunod, Paris, 1969. – 143 p. 11. Буренин А.А., Ковтанюк Е.В. Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругопластического материала // Прикладная механика и техн. физика, 2006. – 235 с. 12. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с. 13. Чигарев А.В., Кравчук А.С. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. – Мн.: “Техноприт”, 2000. – 198 с. 15. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред/ Под ред. Шемякина Е.И. – Мн.: УП “Техноприт”, 2000. – 426 с.